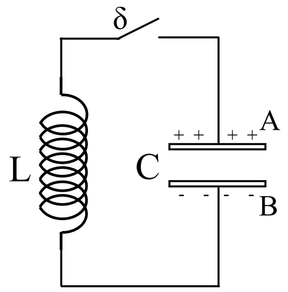
Ερώτηση με αιτιολόγηση

Στο ιδανικό κύκλωμα LC του σχήματος, ο πυκνωτής είναι φορτισμένος με φορτίο Q και ο διακόπτης δ ανοιχτός. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ κλείνουμε το διακόπτη όποτε το κύκλωμα εκτελεί ελεύθερη αρμονική ηλεκτρική ταλάντωση χωρίς απόσβεση (οπλισμός αναφοράς ο Α).



Να δικαιολογήσετε την ορθότητα ή μη του παρακάτω ισχυρισμού:
«Τη χρονική στιγμή, που για δεύτερη φορά μετά το κλείσιμο το διακόπτη, η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου είναι τριπλάσια της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή, ο ρυθμός μεταβολής του ρεύματος που διαρρέει το ηλεκτρικό κύκλωμα είναι $+\dfrac{\omega^2 Q}{2}$ *».*

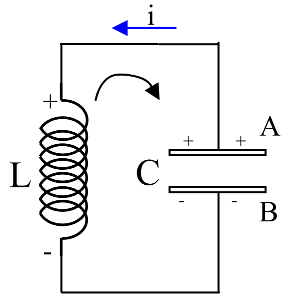
Απάντηση

Επειδή τη χρονική στιγμή $t_0=0$ που κλείνουμε το διακόπτη το φορτίο του οπλισμού αναφοράς είναι μέγιστο (q=+Q), η χρονική εξίσωση του φορτίου του οπλισμού αναφοράς Α έχει τη μορφή $q = Q\sigma\upsilon\nu\omega t$ και η χρονική εξίσωση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα επίσης $i = -I\eta\mu\omega t$.
Με V_c συμβολίζουμε τη διαφορά δυναμικού $V_A - V_B$, στα άκρα του πυκνωτή ($V_c = V_A - V_B$ με V_A το δυναμικό του οπλισμού αναφοράς Α).

Κάθε χρονική στιγμή ισχύει $E_{\alpha\upsilon\tau} = V_c$. Έχουμε λοιπόν

$$E_{\alpha\upsilon\tau} = V_c \rightarrow -L\frac{di}{dt} = \frac{q}{C} \rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{1}{LC}\cdot q$$

Όμως $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow \omega^2 = \dfrac{1}{LC}$, οπότε $\dfrac{di}{dt} = -\omega^2\cdot q$ (1)



Τυχαία στιγμή

(προσέξτε την αναλογία με: $\alpha = -\omega^2\cdot x \rightarrow \dfrac{d\upsilon}{dt} = -\omega^2\cdot x$)

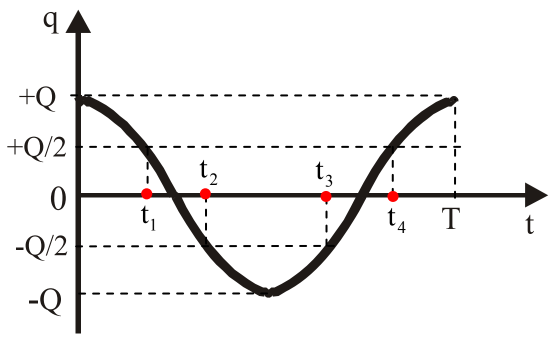
α΄ τρόπος

Από την αρχή της διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης παίρνουμε:

$$U_E + U_B = E_T \xrightarrow{U_B=3U_E} 4U_E = E_T \rightarrow U_E = \frac{1}{4}E_T \rightarrow \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \rightarrow q^2 = \frac{Q^2}{4} \rightarrow q = \pm\frac{Q}{2}.$$

Με βάση και το διπλανό σχήμα, η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου είναι τριπλάσια της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή για δεύτερη φορά, τη χρονική στιγμή $t = t_2$ που $q = -\dfrac{Q}{2}$ (2).

Οι (1) και (2) δίνουν $\dfrac{di}{dt} = -\omega^2\cdot\left(-\dfrac{Q}{2}\right) \rightarrow \dfrac{di}{dt} = +\dfrac{\omega^2 Q}{2}$



***Συμπέρασμα*: Ο ισχυρισμός είναι ορθός.**

β΄ τρόπος

Θα βρούμε αρχικά τη χρονική στιγμή στην οποία η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου είναι τριπλάσια της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή για δεύτερη φορά. Έχουμε:

$$U_B = 3U_E \rightarrow \frac{1}{2}Li^2 = 3\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \rightarrow i^2 = 3\frac{1}{LC}q^2 \xrightarrow{\omega^2=\frac{1}{LC}} i^2 = 3\omega^2 q^2 \rightarrow (-I\eta\mu\omega t)^2 = 3\omega^2(Q\sigma\upsilon\nu\omega t)^2 \rightarrow$$

$$I^2\eta\mu^2(\omega t) = 3\omega^2 Q^2\sigma\upsilon\nu^2(\omega t) \xrightarrow{I=\omega Q} \eta\mu^2(\omega t) = 3\sigma\upsilon\nu^2(\omega t) \rightarrow \frac{\eta\mu^2(\omega t)}{\sigma\upsilon\nu^2(\omega t)} = 3 \rightarrow \varepsilon\varphi^2(\omega t) = 3 \rightarrow$$

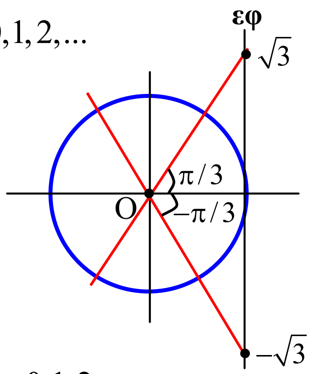
$$\varepsilon\varphi(\omega t) = \pm\sqrt{3}$$

- Αν $\varepsilon\varphi(\omega t) = +\sqrt{3} \rightarrow \varepsilon\varphi(\omega t) = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} \rightarrow \omega t = k\pi + \frac{\pi}{3} \rightarrow t = \frac{kT}{2} + \frac{T}{6},\ \ k = 0,1,2,...$

  $k = 0,\ \ t = \frac{T}{6}$

  $k = 1,\ \ t = \frac{2T}{3}$

  $k = 2,\ \ t = \frac{7T}{6}, ...$



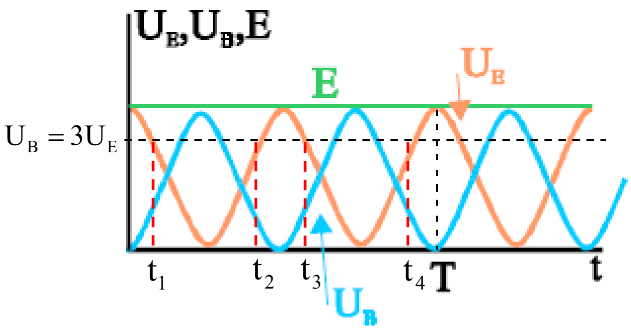
- Αν $\varepsilon\varphi(\omega t) = -\sqrt{3} \rightarrow \varepsilon\varphi(\omega t) = \varepsilon\varphi(-\frac{\pi}{3}) \rightarrow \omega t = k\pi - \frac{\pi}{3} \rightarrow t = \frac{kT}{2} - \frac{T}{6},\ \ k = 0,1,2,...$

  $k = 0,\ \ t = -\frac{T}{6}$, απορρίπτεται

  $k = 1,\ \ t = \frac{T}{3}$

  $k = 2,\ \ t = \frac{5T}{6}$

  $k = 3,\ \ t = \frac{4T}{3}, ...$



Οπότε για πρώτη φορά $t_1 = \frac{T}{6}$, για δεύτερη φορά $t_2 = \frac{T}{3}$, για τρίτη φορά $t_3 = \frac{2T}{3}$, $t_4 = \frac{5T}{6}$, ...

Η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι η $t_2 = \frac{T}{3}$. Τότε:

$$q = Q\sigma\upsilon\nu\omega t \rightarrow q = Q\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \xrightarrow{t=\frac{T}{3}} q = Q\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{3}\right) \rightarrow q = Q\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right) \rightarrow q = -Q\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\rightarrow q = -\frac{Q}{2}\quad (2)$$

Οι (1) και (2) δίνουν $\frac{di}{dt} = -\omega^2\cdot\left(-\frac{Q}{2}\right) \rightarrow \frac{di}{dt} = +\frac{\omega^2 Q}{2}$

***Συμπέρασμα*: Ο ισχυρισμός είναι ορθός.**

asteriostr@gmail.com